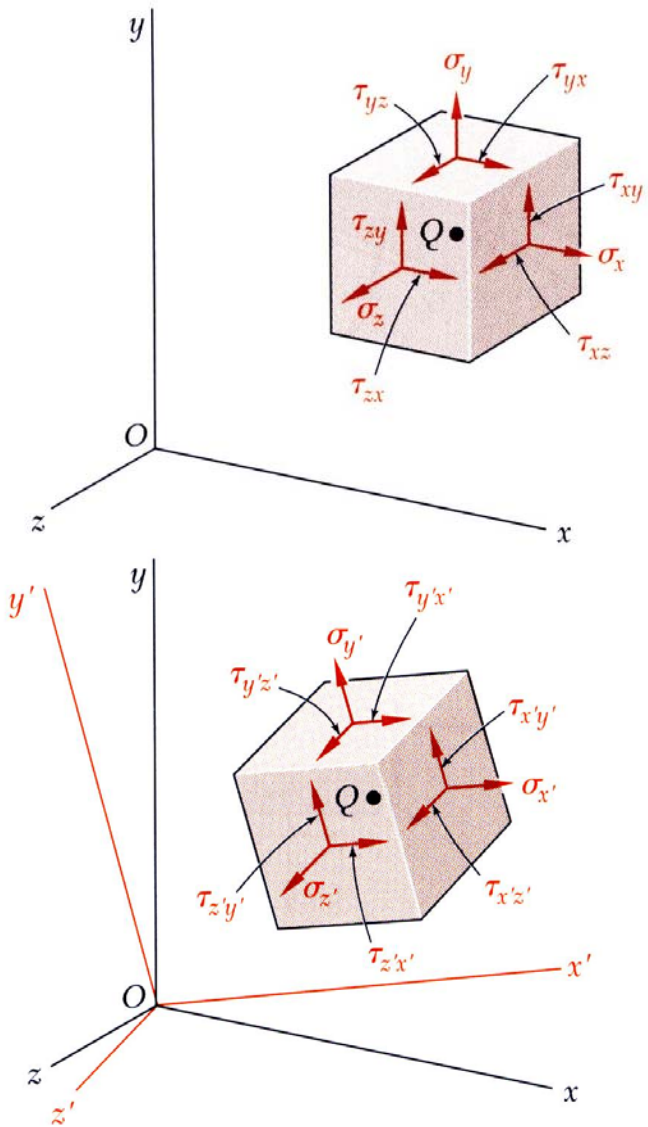


6. Estado Plano de Tensões. Circulo de Mohr

Conteúdo

Introdução
Transformação de Tensões Planas
Tensões Principais
Tensão de Cisalhamento Máxima
Problema Exemplo 6.1
Círculo de Mohr para Estado Plano de Tensões
Problema Exemplo 6.2

Introdução



- O estado mais geral de tensão em um ponto pode ser representado por 6 componentes,

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ tensões normais

$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ tensões de cisalhamento

(Note: $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$)

- O mesmo estado de tensão é representado por um conjunto diferente de componentes se os eixos forem girados.

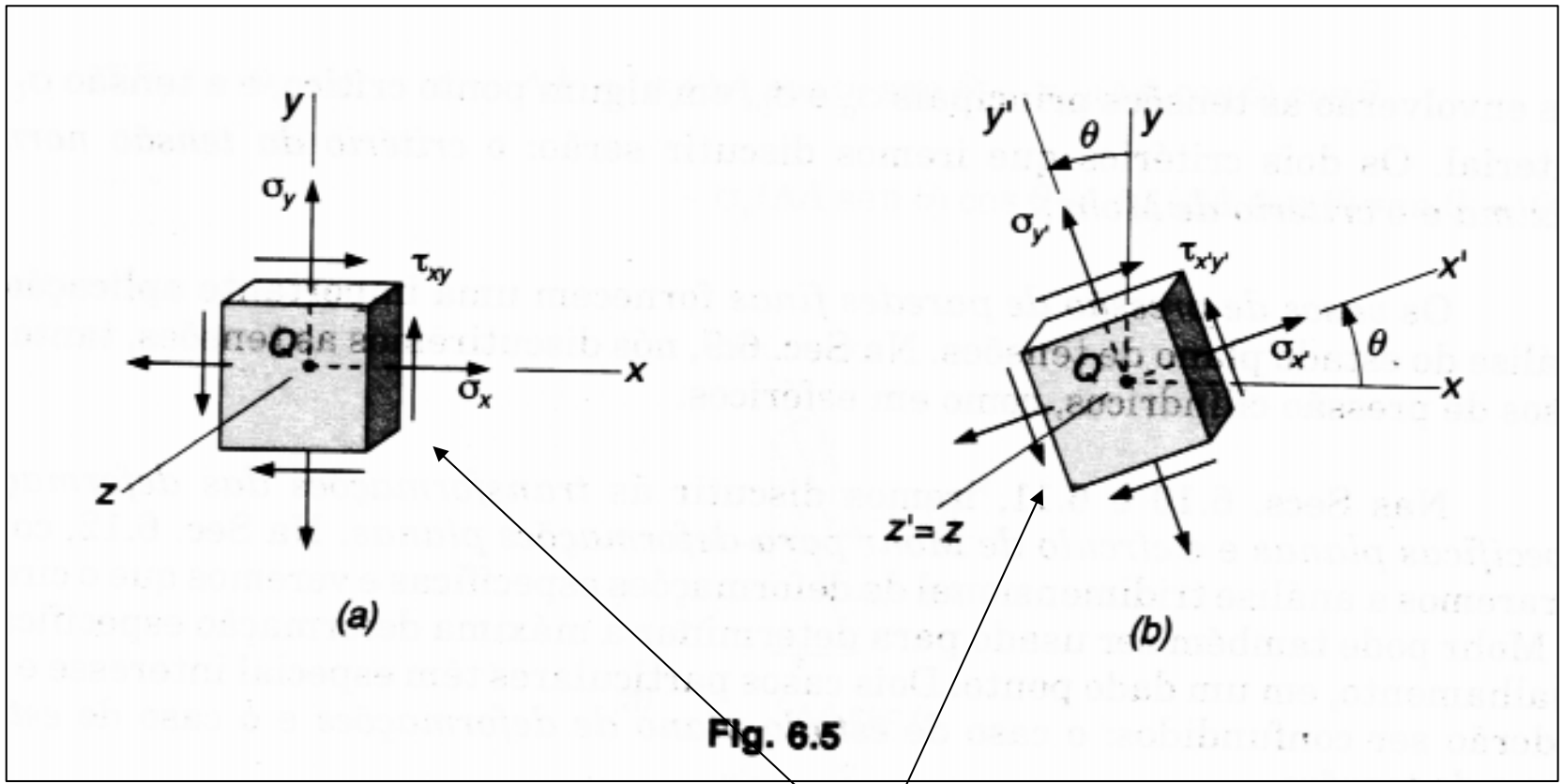


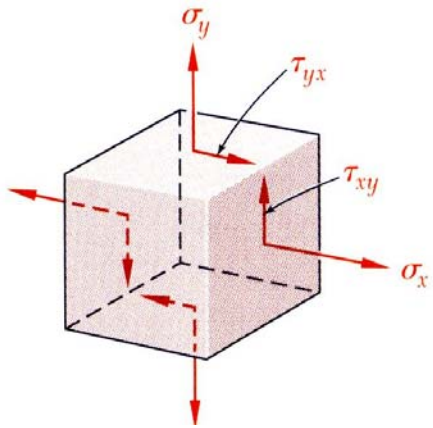
Fig. 6.5

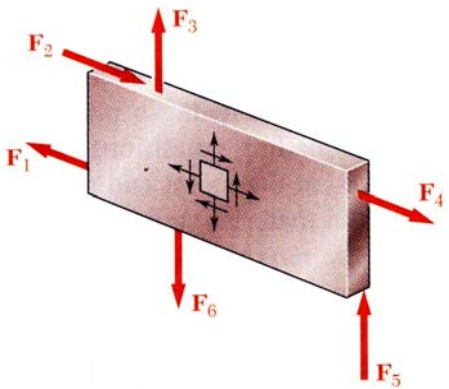
Objetivos:

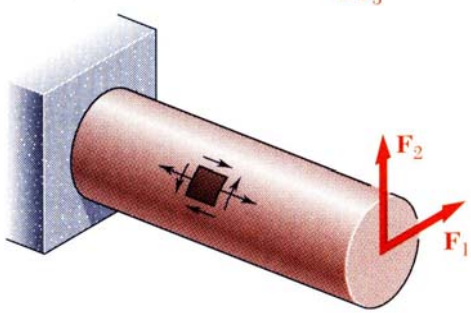
-determinar os valores de tensão em função da rotação dos planos;

-determinar as direções de tensão máxima e tensão mínima (tensões principais).

Introdução







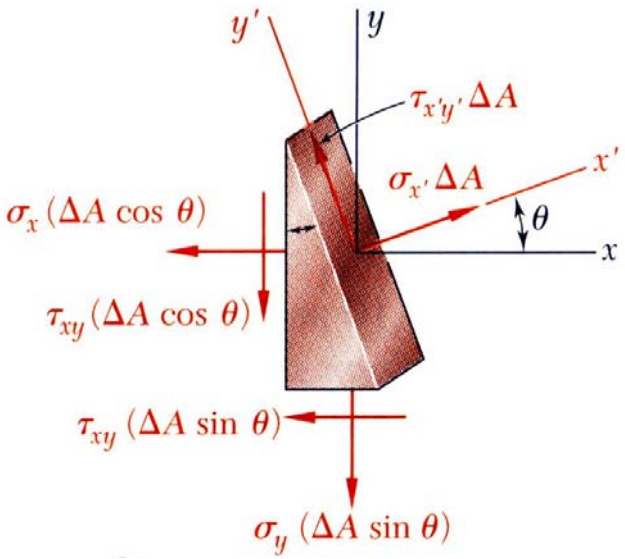
- *Tensão plana* - estado de tensão em que duas faces do elemento cúbico estão livres de tensão. Para o exemplo ilustrado, o estado de tensão é definido por

$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \quad \text{e} \quad \sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0.$$

- Estado plano de tensões ocorre numa placa fina sujeita a forças agindo no meio do plano da placa.

- Também ocorre na superfície livre de um componente de máquina ou elemento estrutural, isto é, em qualquer ponto da superfície não sujeita a uma força externa.

Transformação de Tensões Planas



- Considere as condições de equilíbrio de um elemento prismático com faces perpendiculares aos eixos x, y, e x'.

$$\sum F_{x'} = 0 = \sigma_{x'}\Delta A - \sigma_x(\Delta A\cos\theta)\cos\theta - \tau_{xy}(\Delta A\cos\theta)\operatorname{sen}\theta - \sigma_y(\Delta A\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta - \tau_{xy}(\Delta A\operatorname{sen}\theta)\cos\theta$$

$$\sum F_{y'} = 0 = \tau_{xy'}\Delta A + \sigma_x(\Delta A\cos\theta)\operatorname{sen}\theta - \tau_{xy}(\Delta A\cos\theta)\cos\theta - \sigma_y(\Delta A\operatorname{sen}\theta)\cos\theta + \tau_{xy}(\Delta A\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta$$

- As equações podem ser reescritas como:



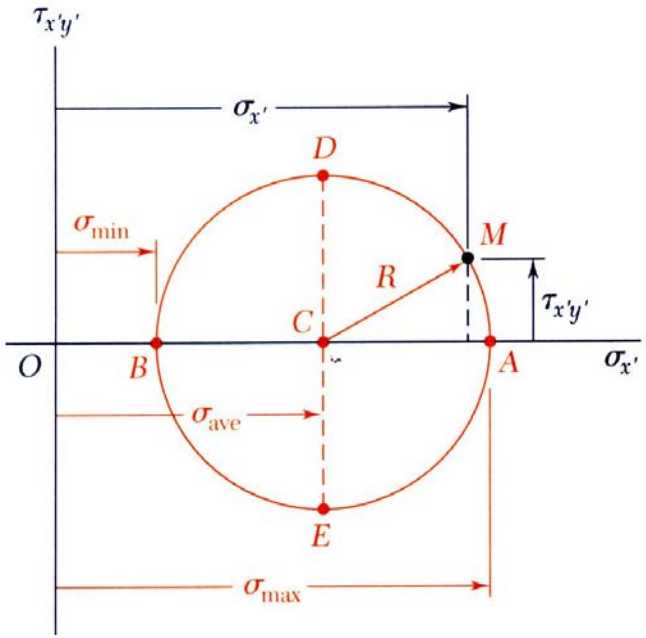


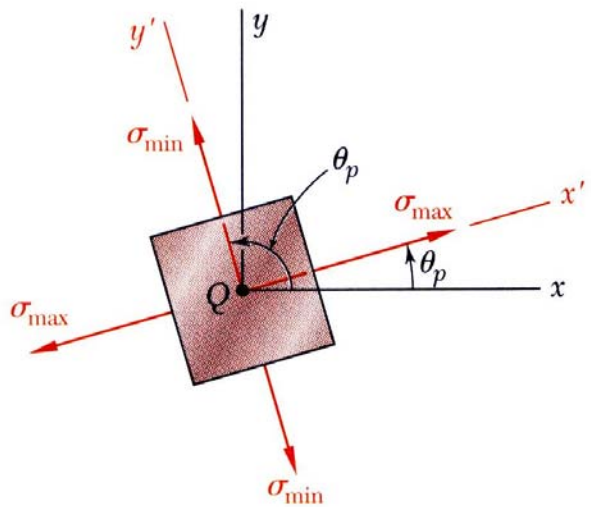
$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\operatorname{sen}2\theta$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\operatorname{sen}2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\operatorname{sen}2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

Tensões Principais





- As equações anteriores são combinadas para levar a equações paramétricas para um círculo,

$$(\sigma_{x'} - \sigma_m)^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2$$

onde

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \qquad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

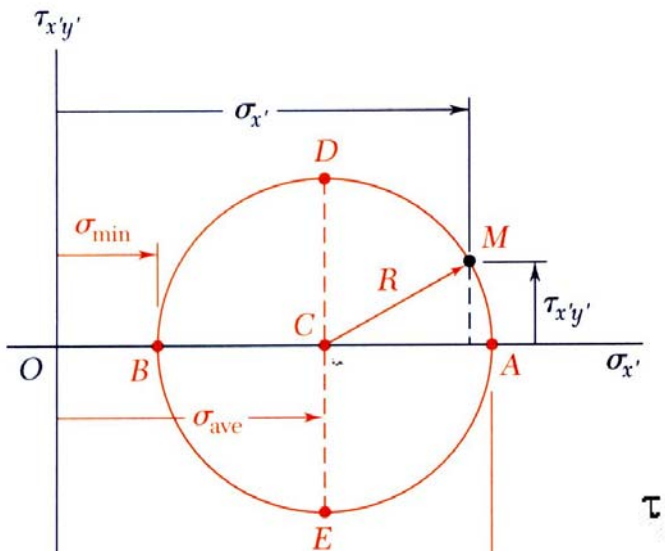
- *Tensões principais* ocorrem nos *planos principais de tensão*, onde as tensões de cisalhamento são nulas.

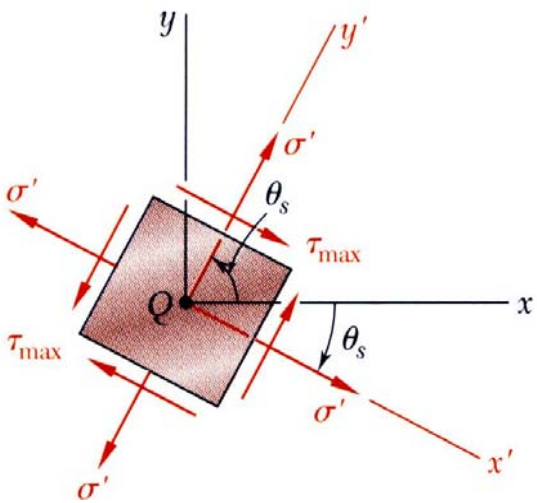
$$\sigma_{max,min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$tg2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$ (das equações paramétricas)

Nota: define dois ângulos separados de 90°

Tensão de Cisalhamento Máxima





Tensão de cisalhamento máxima ocorre para

$\sigma_{x'} = \sigma_m$ e da equação anterior para o círculo:

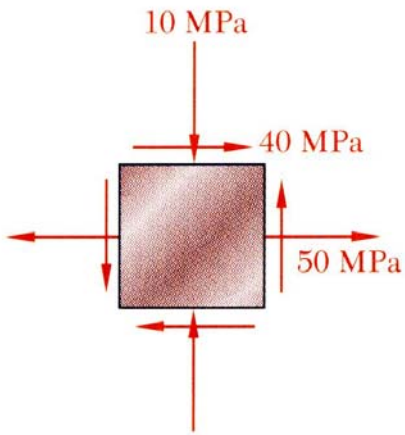
$$\tau_{max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$tg2\theta_c = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$ (das equações paramétricas)

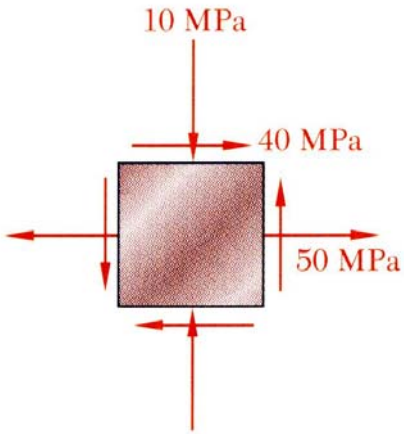
Nota: define dois ângulos defasados de 90° entre si e defasados de 45° em relação a θ_p

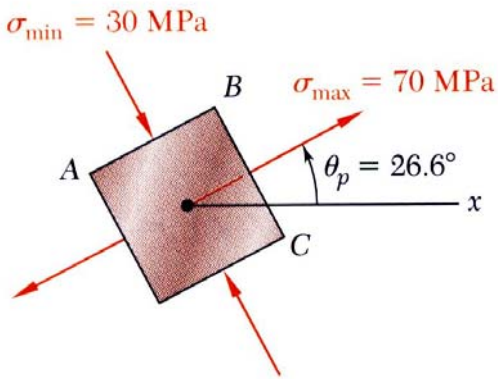
$$\sigma' = \sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

Ex. 6.1: Para o estado de tensão plana mostrado, determine (*a*) os planos principais, (*b*) as tensões principais, (*c*) a tensão de cisalhamento máxima e a tensão normal correspondente.

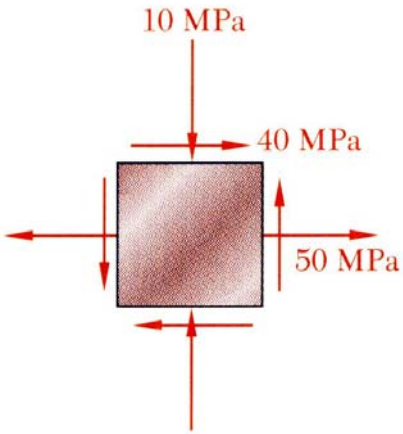


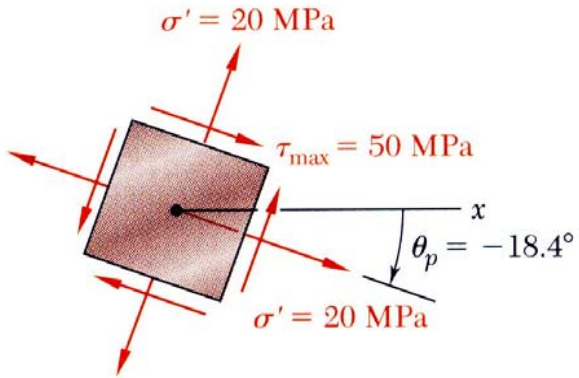
Ex. 6.1


10 MPa
40 MPa
50 MPa


$\sigma_{min} = 30$ MPa
B
$\sigma_{max} = 70$ MPa
A
$\theta_p = 26.6°$
x
C

Ex. 6.1


10 MPa
40 MPa
50 MPa


$\sigma' = 20$ MPa
$\tau_{max} = 50$ MPa
x
$\theta_p = -18.4°$
$\sigma' = 20$ MPa

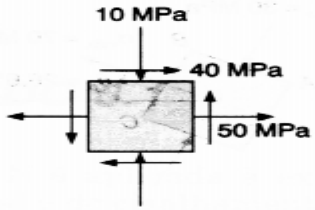


Fig. ex.6.11

(*a*) **Planos principais.** Adotando a convenção de sinais habitual, exprimimos as componentes de tensão por

$$\sigma_x = +50\ \text{MPa} \qquad \sigma_y = -10\ \text{MPa} \qquad \tau_{xy} = +40\ \text{MPa}$$

Substituindo os valores acima na Eq. 6.12, encontramos

$$\text{tg}\ 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(+40)}{50 - (-10)} = \frac{80}{60}$$

$$2\theta_p = 53{,}1^\circ \quad \text{e} \quad 180^\circ + 53{,}1^\circ = 233{,}1^\circ$$

$$\theta_p = 26{,}6^\circ \quad \text{e} \quad 116{,}6^\circ$$

(*b*) **Tensões principais.** A Fórm. 6.14 leva a

$$\sigma_{\text{máx, mín}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 20 \pm \sqrt{(30)^2 + (40)^2}$$

$$\sigma_{\text{máx}} = 20 + 50 = 70\ \text{MPa} \qquad \sigma_{\text{mín}} = 20 - 50 = -30\ \text{MPa}$$

Na Fig. 6.12 estão esquematizados os planos principais e as tensões principais. Substituindo $\theta = 26{,}6^\circ$ na Eq. 6.5 verificamos que a tensão normal da face *BC* do cubo elementar é a máxima tensão:

$$\sigma_{x'} = \frac{50 - 10}{2} + \frac{50 + 10}{2} \cos 53{,}1^\circ + 40 \operatorname{sen} 53{,}1^\circ$$

$$= 20 + 30 \cos 53{,}1^\circ + 40 \operatorname{sen} 53{,}1^\circ = 70\ \text{MPa} = \sigma_{\text{máx}}$$

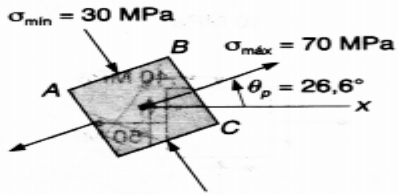


Fig. ex.6.12

(*c*) **Tensão de cisalhamento máxima.** A Fórm. 6.16 leva a

$$\tau_{máx} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50 \text{ MPa}$$

Uma vez que $\sigma_{máx}$ e $\sigma_{mín}$ têm sinais opostos, o valor obtido para $\tau_{máx}$ representa realmente o valor máximo da tensão de cisalhamento no ponto considerado. Para determinarmos o sentido das tensões de cisalhamento e a orientação dos planos de tensão máxima, passamos uma seção ao longo do plano diagonal *AC* do elemento da Fig. 6.12. As faces *AB* e *BC* do cubo elementar estão situadas nos planos principais de modo que o plano diagonal *AC* é um dos planos de tensão máxima de cisalhamento (Fig. 6.13). Além disso, as condições de equilíbrio do prisma elementar *ABC* exigem que a tensão de cisalhamento seja dirigida como indica a figura. A Fig. 6.14 mostra então, o cubo elementar que corresponde à máxima tensão de cisalhamento. A tensão normal em cada face do cubo elementar é dada pela Eq. 6.17:

$$\sigma' = \sigma_{méd} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50 - 10}{2} = 20 \text{ MPa}$$

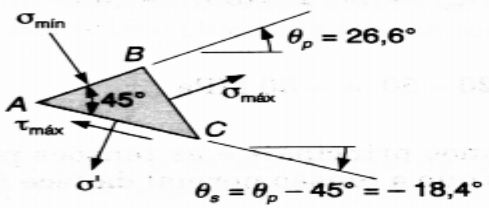


Fig. ex.6.13

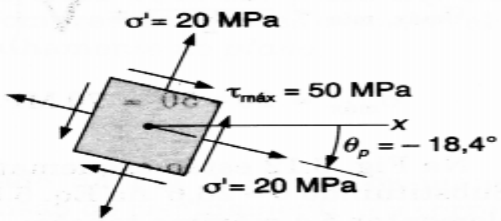
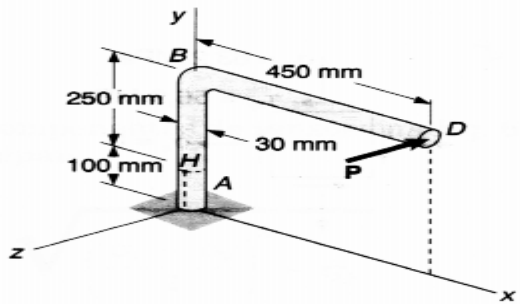


Fig. ex.6.14

PROBLEMA RESOLVIDO 6.1

Uma força horizontal **P** de 670 N é aplicada à extremidade D da alavanca ABD. Determinar: (a) as tensões normal e de cisalhamento em um cubo elementar situado no ponto H, com lados paralelos aos eixos x e y; (b) os planos principais e as tensões principais.

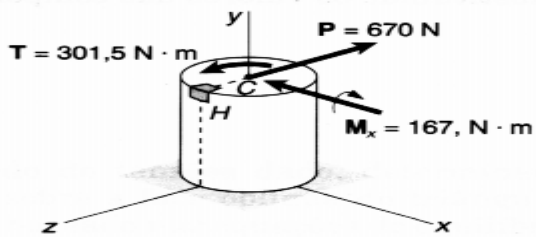


Solução. Substituímos a força **P** por um sistema de momentos e força cortante aplicado no ponto C, centróide da seção transversal que contém o ponto H.

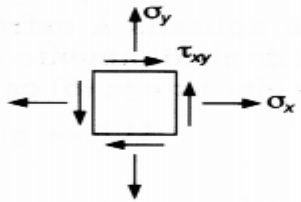
$$P = 670\ \text{N}$$

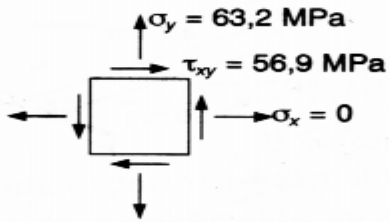
$$T = (670\ \text{N})(0{,}45\ \text{m}) = 301{,}5\ \text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_x = (670\ \text{N})(0{,}25\ \text{m}) = 167{,}5\ \text{N} \cdot \text{m}$$



(*a*) **Tensões σ_x, σ_y e τ_{xy} no ponto *H*.** Com um exame cuidadoso do sistema de força e momento aplicado em *C*, determinamos o sentido e o sinal de cada componente de tensão, usando a convenção de sinais indicada na Fig. 6.2.





$$\sigma_x = 0 \qquad \sigma_y = +\frac{Mc}{J} = +\frac{(167{,}5\ \text{N}\cdot\text{m})(0{,}015\ \text{m})}{\pi/4\,(0{,}015\ \text{m})^4}$$

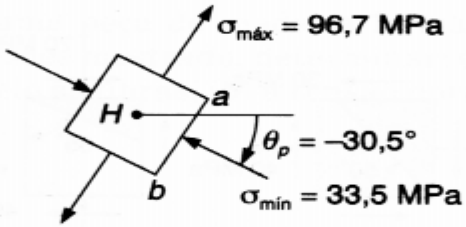
$$\sigma_y = +63{,}2\ \text{MPa} \quad \blacktriangleleft$$

$$\tau_{xy} = \frac{Tc}{J} = +\frac{(301{,}5\ \text{N}\cdot\text{m})(0{,}015\ \text{m})}{\pi/2\,(0{,}015\ \text{m})^4}$$

$$\tau_{xy} = 56{,}9\ \text{MPa} \quad \blacktriangleleft$$

A força **P** não provoca tensões de cisalhamento no ponto *H*.

(*b*) **Planos principais e tensões principais.** A orientação dos planos principais é encontrada substituindo os valores das componentes de tensões calculadas na Eq. 6.12.



$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_z - \sigma_y} = \frac{2(56,9)}{0 - 63,2} = -1,80$$

$$2\theta_p = -61,0° \qquad \text{e} \qquad 180° - 61,0° = +119°$$

$$\theta_p = -30,5° \quad \text{e} \quad +59,5° \blacktriangleleft$$

Substituindo as componentes de tensões na Eq. 6.14, determinamos as intensidades das tensões principais

$$\sigma_{máx,\ mín} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

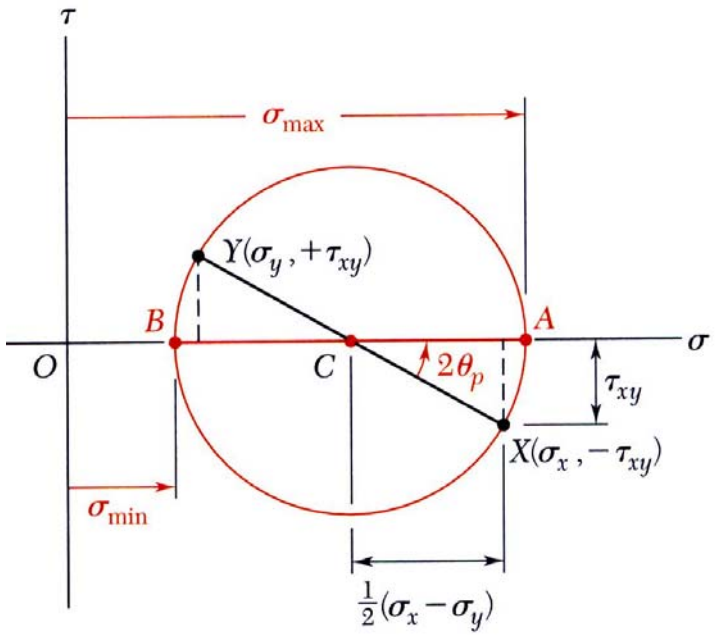
$$= \frac{0 + 6,32}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 - 63,2}{2}\right)^2 + (56,9)^2} = +31,6 \pm 65,1$$

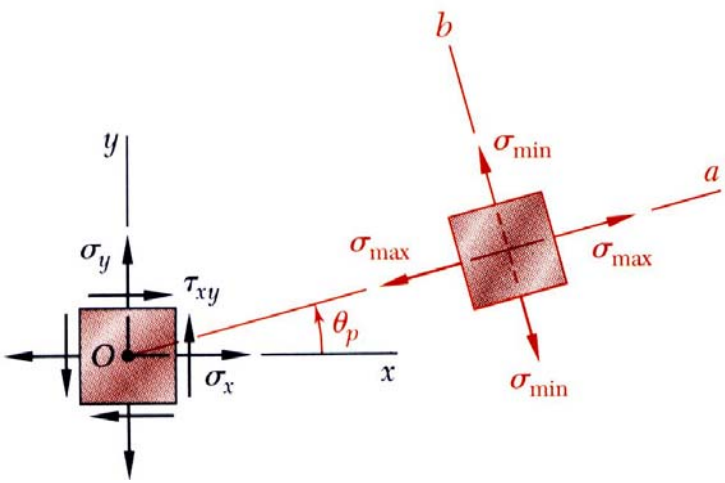
$$\sigma_{máx} = +96,7\,\text{MPa} \blacktriangleleft$$

$$\sigma_{mín} = -33,5\,\text{MPa} \blacktriangleleft$$

Considerando a face *ab* do cubo elementar, fazemos $\theta_p = -30,5°$ na Eq. 6.5, encontrando $\sigma_{x'} = -33,5\,\text{MPa}$. Concluímos então que as tensões principais estão aplicadas como indica a figura.

Círculo de Mohr para Estado Plano de Tensões





- Com o significado físico do círculo de Mohr para tensão plana estabelecido, este pode ser aplicado com simples considerações geométricas. Valores críticos são estimados graficamente ou calculados.

- Para um estado plano de tensão conhecido $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, plote os pontos *X* e *Y* e construa o círculo centrado em *C*.

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \qquad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- As tensões principais são obtidas em *A* e *B*.

$$\sigma_{max,min} = \sigma_m \pm R$$

$$tg2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

A direção de rotação de *Ox* para *Oa* é a mesma que de *CX* para *CA*.

PASSOS PARA A CONSTRUÇÃO DO CÍRCULO (fig. 6.15a):

1- Marcar o ponto X: $(\sigma_x, -\tau_{xy})$

2- Marcar o ponto Y: $(\sigma_y, +\tau_{xy})$

3- Se $\sigma_x > 0$: X é marcado abaixo do eixo σ_x e Y acima

Senão: X marcado acima e Y abaixo do eixo

4- Traça-se a reta XY que ao cruzar o eixo σ_x define o centro C do círculo de raio R, cujos valores são dados por equações vistas anteriormente

5- Nos pontos A e B encontram-se as tensões principais: σ_{max} e σ_{min}

6-Direção das tensões principais: $$tg(XCA) = \frac{\tau_{xy}}{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}} = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)} = tg(2\theta_p)$$

7- Se $\sigma_x > \sigma_y$ e $\tau_{xy} > 0$: a rotação para levar CX a coincidir com CA é anti-horária e $\theta_p > 0$

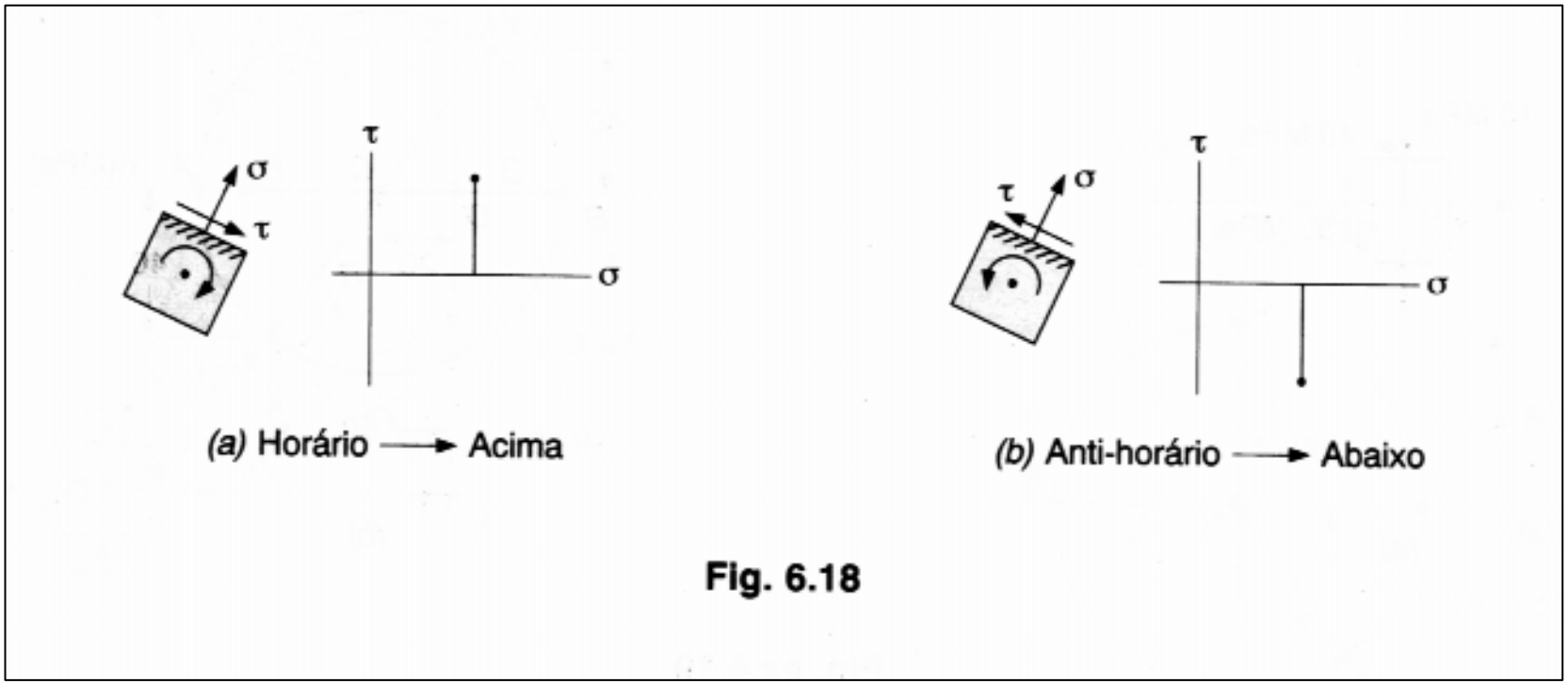
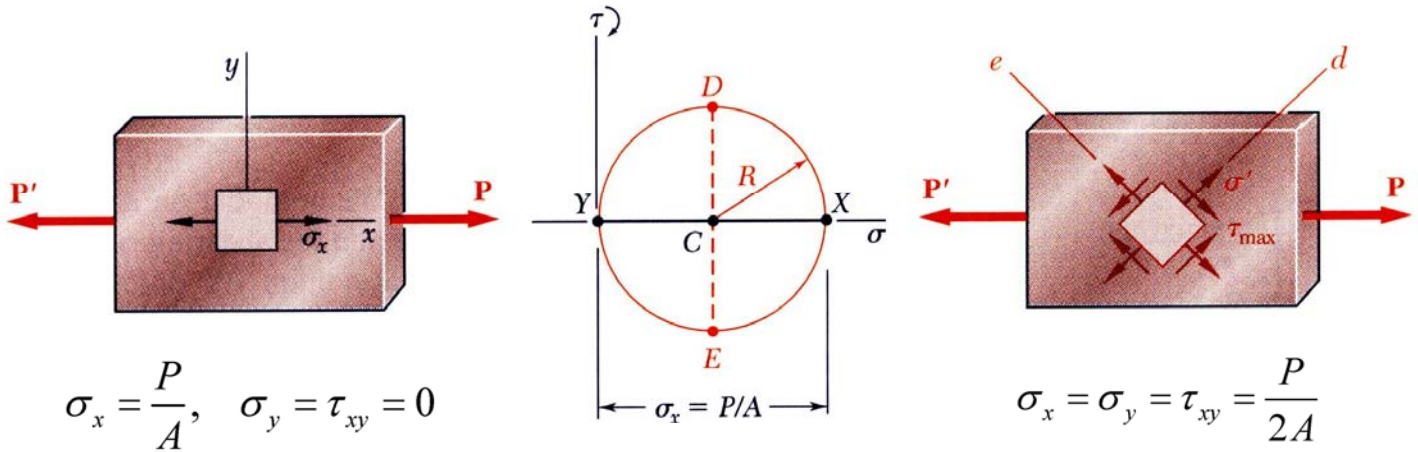


Fig. 6.18

Círculo de Mohr para Estado Plano de Tensões

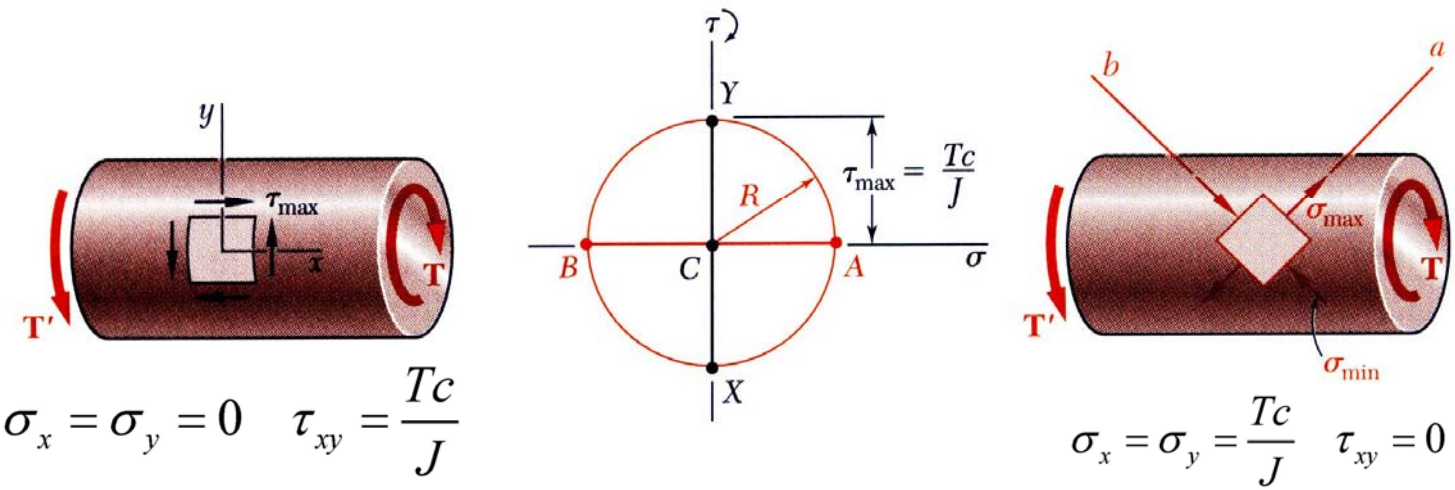
- Círculo de Mohr para carregamento axial centrado:



$$\sigma_x = \frac{P}{A}, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \frac{P}{2A}$$

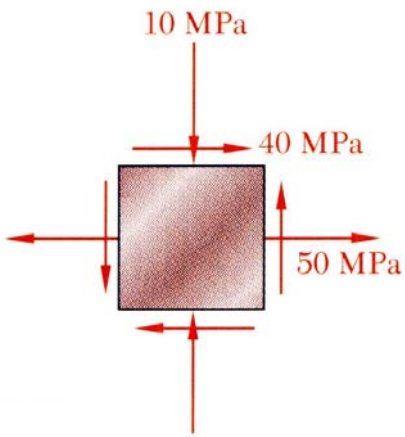
- Círculo de Mohr para carregamento torcional:

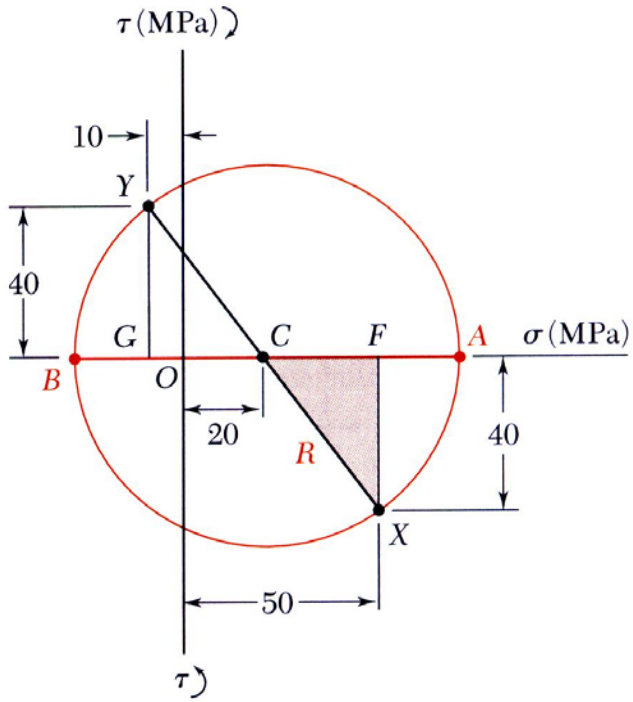


$$\sigma_x = \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = \frac{Tc}{J}$$

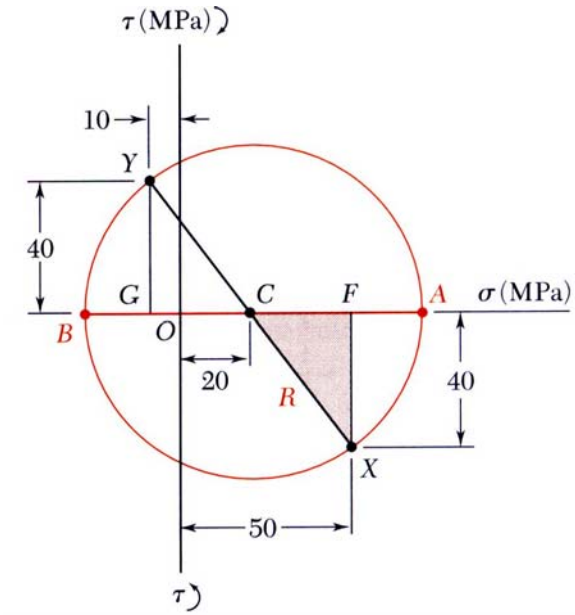
$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{Tc}{J} \quad \tau_{xy} = 0$$

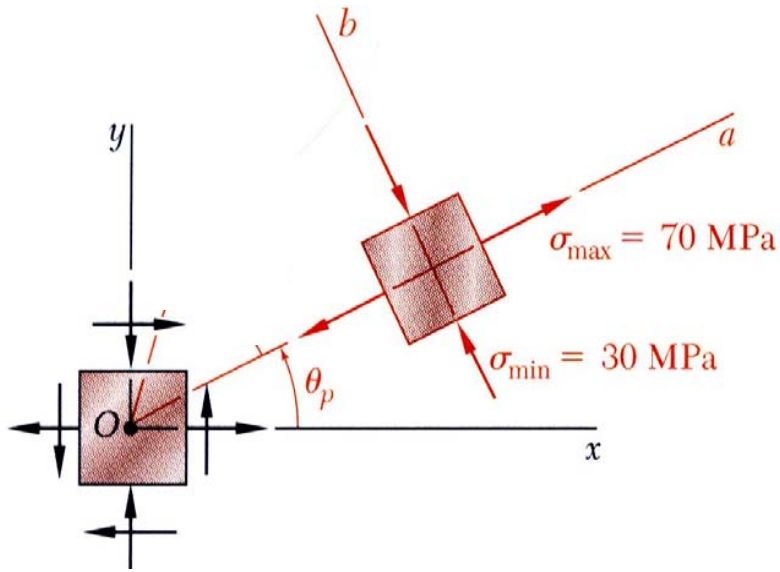
Ex. 6.2: Para o estado de tensão plana mostrado, (*a*) construa o círculo de Mohr, determine (*b*) os planos principais, (*c*) as tensões principais, (*d*) a tensão de cisalhamento máxima e a tensão normal correspondente.



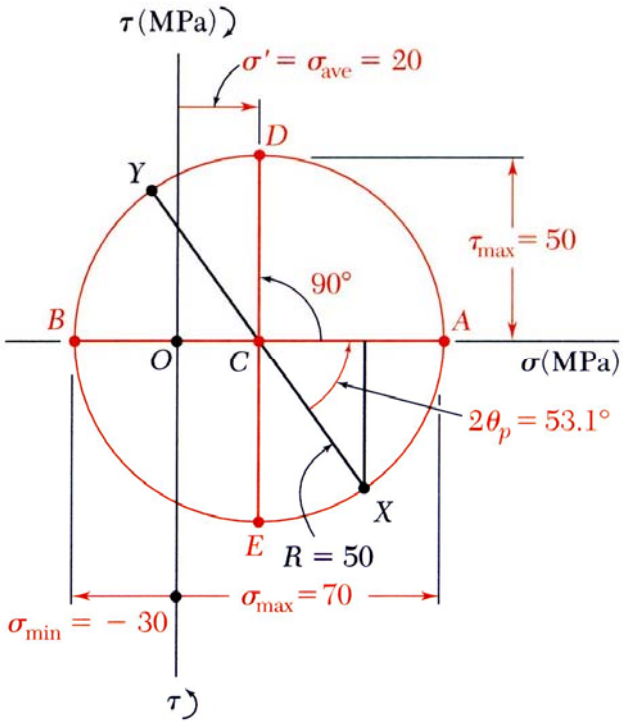


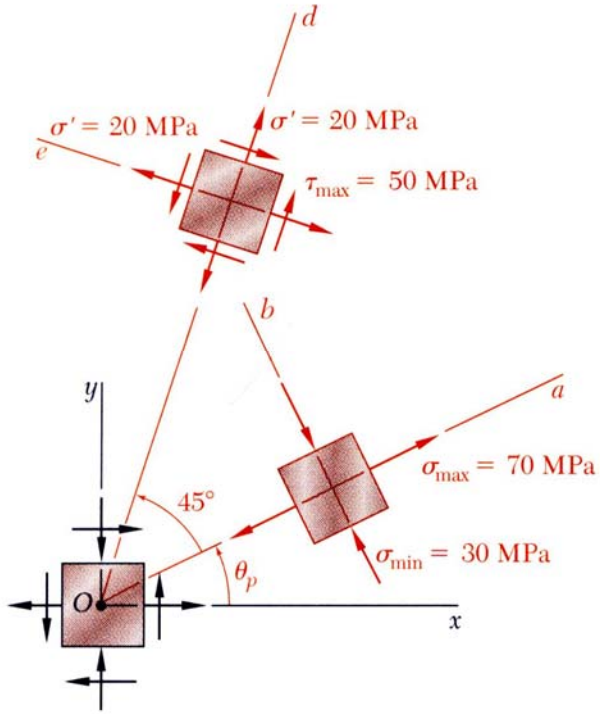
Ex. 6.2


τ (MPa)
10
Y
40
G
C
F
A
σ (MPa)
B
O
20
R
40
X
50
τ


b
a
y
σmax = 70 MPa
σmin = 30 MPa
θp
O
x

Ex. 6.2


τ (MPa)
σ′ = σave = 20
D
Y
τmax = 50
90°
B
A
O
C
σ (MPa)
2θp = 53.1°
X
E
R = 50
σmax = 70
σmin = − 30
τ


d
σ′ = 20 MPa
σ′ = 20 MPa
e
τmax = 50 MPa
b
a
y
σmax = 70 MPa
45°
σmin = 30 MPa
θp
O
x

EXEMPLO 6.2

Considerando o estado plano de tensões do Ex. 6.1: (*a*) construir o círculo de Mohr; (*b*) determinar as tensões principais; (*c*) determinar a tensão máxima de cisalhamento e as tensões normais correspondentes.

(*a*) **Construção do círculo de Mohr.** Notamos na Fig. 6.91*a* que a tensão normal que se exerce na face perpendicular ao eixo x é de tração (positiva) e que a tensão de cisalhamento nessa face tende a rodar o elemento no sentido anti-horário. Desse modo, o ponto X do círculo de Mohr será marcado à direita do eixo vertical e abaixo do eixo horizontal (Fig. 6.19*b*). Analisando do mesmo modo as tensões normal e de cisalhamento que se exercem na face superior do elemento, vemos que o ponto Y deve ser colocado à esquerda do eixo vertical e acima do eixo horizontal. A linha XY fornece a posição do centro C do círculo de Mohr; a abscissa desse ponto é

$$\sigma_{méd} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50 + (-10)}{2} = 20\ \text{MPa}$$

Como os lados do triângulo sombreado valem

$$CF = 50 - 20 = 30\ \text{MPa} \quad \text{e} \quad FX = 40\ \text{MPa}$$

o raio do círculo de Mohr é

$$R = CX = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50 \text{ MPa}$$

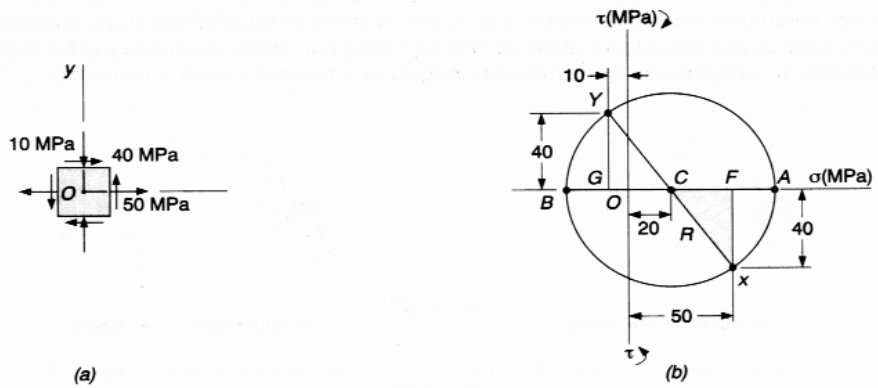


Fig. ex.6.19

(*b*) **Planos principais e tensões principais.** As tensões principais são

$$\sigma_{máx} = OA = OC + CA = 20 + 50 = 70 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{mín} = OB = OC - BC = 20 - 50 = -30 \text{ MPa}$$

Lembrando que o ângulo ACX representa $2\theta_p$ (Fig. 6.19*b*), podemos escrever

$$\tan 2\theta_p = \frac{FX}{CF} = \frac{40}{30}$$

$$2\theta_p = 53{,}1^\circ \qquad \theta_p = 26{,}6^\circ$$

Como a rotação que leva CX a coincidir com CA na Fig. 6.20*b* é anti-horária, a rotação que faz Ox coincidir com Oa (correspondente a $\sigma_{máx}$) na Fig. 6.20*a* será também anti-horária.

(*c*) **Tensão máxima de cisalhamento.** Na Fig. 6.20*b*, uma rotação adicional de 90° faz coincidir CA com CD, de modo que na Fig. 6.20*a* uma rotação adicional de 45° levará o eixo Oa a coincidir com Od, que corresponde à máxima tensão de cisalhamento. Podemos ver na Fig. 6.20*b* que $\tau_{máx} = R = 50$ MPa e que a tensão normal correspondente é $\sigma' = \sigma_{média} = 20$ MPa. O ponto D se localiza acima do eixo σ (Fig.

6.20*b*), de modo que as tensões de cisalhamento que se exercem nas faces perpendiculares a *Od* (Fig. 6.20*a*) devem ser dirigidas de modo a fazer rodar o elemento no sentido horário.

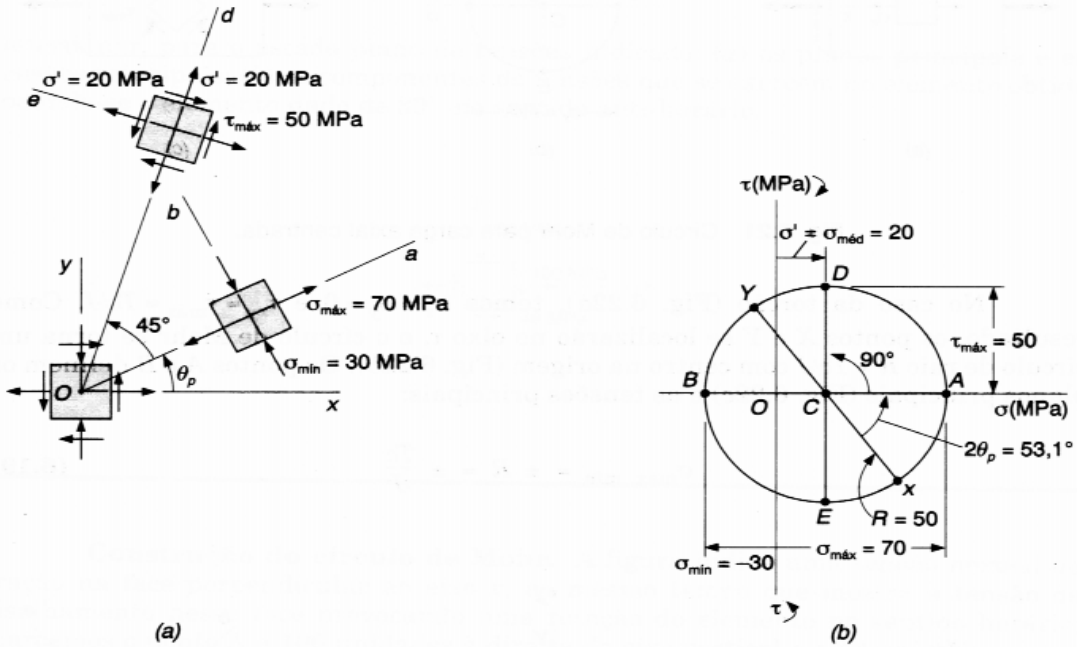


Fig. ex.6.20

O círculo de Mohr fornece um modo conveniente de verificação dos resultados obtidos anteriormente para as tensões provocadas por carregamento axial centrado (Sec. 1.8) e provocadas por carregamento torcional (Sec. 3.4). No primeiro caso (Fig. 6.21*a*), temos $\sigma_x = P/A$, $\sigma_y = 0$ e $\tau_{xy} = 0$. Os pontos correspondentes a essas tensões, *X* e *Y*, definem um círculo de raio $R = P/2A$ que passa pela origem do sistema coordenado (Fig. 6.21*b*). Os pontos *D* e *E* levam à orientação do plano de tensão de cisalhamento máxima (Fig. 6.21*c*), bem como ao valor de $\tau_{máx}$ e ao valor da tensão normal correspondente σ':

$$\tau_{máx} = \sigma' = R = \frac{P}{2A} \qquad \textbf{(6.18)}$$